**Аппроксимируемость задачи**

**о нескольких коммивояжерах**

М.Ю.Хачай  
(Институт математики и механики им. Н.Н.Красовского УрО РАН)

Задача коммивояжера (Traveling Salesman Problem, TSP) являющаяся одной из классических труднорешаемых задач комбинаторной оптимизации, связана с отысканием наиболее экономичного циклического обхода (маршрута коммивояжера) для заданного конечного множества «клиентов». Математическая постановка задачи состоит в поиске в полном взвешенном графе *G* гамильтонового цикла минимального веса. Отдельный интерес представляют метрический и евклидов подклассы задачи (Metric TSP и Euclidean TSP, соответственно). В метрическом случае исходный граф является неориентированным, а веса его ребер удовлетворяют неравенству треугольника. В евклидовой постановке предполагается, что вершины графа *G* являются точками *d*-мерного евклидового пространства, а весовая функция задается попарными расстояниями между ними.

Известно, что даже в наиболее частной, евклидовой постановке задача коммивояжера NP-трудна, следовательно, в рамках общепринятой гипотезы P≠NP точное решение задачи не может быть найдено за время, ограниченное сверху полиномом от длины записи ее условия. Более того, известно, что в общем случае задача коммивояжера не допускает и эффективной аппроксимируемости со сколько-нибудь приемлемой точностью.

Тем не менее, для ряда подклассов задачи известны эффективные приближенные алгоритмы. Например, для задачи Metric TSP известен 3/2-приближенный алгоритм Кристофидеса, а задача Euclidean TSP обладает полиномиальной приближенной схемой и асимптотически точным алгоритмом в пространстве произвольной фиксированной размерности.

Задача коммивояжера обладает многочисленными обобщениями, важными как с теоретической точки зрения, так и с точки зрения приложений. Отметим лишь некоторые из них.

Задача *m*-Peripatetic Salesman Problem (*m*-PSP) связана с поиском нескольких реберно-непересекающихся маршрутов коммивояжера, оптимизирующих тот или иной интегральный критерий, например суммарный вес, максимум весов и так далее. Как и TSP, задача *m*-PSP труднорешаема и слабо аппроксимируема в общем случае, однако в конечномерном евклидовом пространстве фиксированной размерности допускает асимптотически точное решение с кубической трудоемкостью.

Постановка задачи об оптимальной маршрутизации (Vehicle Routing Problem, VRP) состоит в следующем: заданы координаты *n* потребителей и координаты «складов» *O1*, …, *Ok*; требуется найти набор замкнутых маршрутов минимальной общей длины, посещающих в совокупности каждого потребителя ровно один раз так, что каждый маршрут начинается и заканчивается в одном из складов *Oi*.

Предметом рассмотрения данного сообщения является задача Minimum-weight *k*-Size Cycle Cover Problem (Min-*k*-SCCP), цель которой состоит в поиске в полном взвешенном орграфе *k* вершинно непересекающихся циклов наименьшего суммарного веса, посещающих каждую вершину графа в точности один раз. Параметр *k* фиксируется заранее и не является частью условия задачи.

С содержательной точки зрения рассматриваемая задача описывает проблему построения наиболее экономичного плана обхода заданного множества клиентов коллективом обслуживающих устройств и потому естественно может называться задачей о нескольких коммивояжерах. С другой стороны, исследуемая задача близка и к задаче маршрутизации и соответствует частному случаю VRP, в котором местоположения складов заранее не фиксируются.

Нами показывается, что задача Min-*k*-SCCP NP-трудна в сильном смысле как в общем случае, так и в метрической и евклидовой постановках. Для задачи Metric Min-*k*-SCCP предложен эффективный приближенный алгоритм с неулучшаемой оценкой точности 2, а для задачи Euclidean Min-*k*-SCCP в евклидовом пространстве произвольной фиксированной размерности *d*>1 обоснована полиномиальная приближенная схема.

Таким образом, несмотря на теоретическую труднорешаемость задачи в общем случае, в геометрической постановке, наиболее часто встречающейся на практике, для произвольной наперед заданной точности предлагается алгоритм, находящий приближенное решение задачи с указанной точностью за время, ограниченное сверху полиномом от числа обслуживаемых клиентов.